Faculté des Sciences et Techniques
Tanger
Département de Mathématiques

Année 2008-2009
1ère année MIPC-GEGM
Analyse 1-M112

CONTROLE CONTINUE N° 1

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviennent pour une partie importante dans l'appréciation de la copie

Exercice 1

a) Enoncer le théorème de Rolle
b) Enoncer le théorème de Taylor Lagrange
c) Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy

Problème 1

1) Soit la suite réelle définie par: $U_n = a(9)^n + b(2)^n + c(-1)^n$ où $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

2) On considère la fonction f définie sur [a, b] et à valeurs dans [a, b] avec a<b. On suppose que f est continue et monotone sur [a, b] et on définit la suite récurrente (U_n) par :

$$\begin{cases} U_0 \in [a, b] \\ U_{n+1} = f(Un) \quad \forall n \in N^* \end{cases}$$

a) En supposant que f est croissante, déterminer la monotonie de la suite (Un) suivant le signe de U_1-U_0.
b) Montrer que la suite U_n converge vers la solution de f(x) = x.

3) Considérons la suite suivante :

$$U_0 = 4; \qquad U_{n+1} = \frac{4U_n + 5}{U_n + 3} \quad \forall n \in N^* \; ; \qquad \text{Calculer } \lim_{n \to +\infty} U_n$$

Problème 2

1) Soit $f(x) = (x^2 - 1)^n$ $\quad n \in N^*$.

a) Montrer que l'on a: $(x^2 - 1)f'(x) = 2n\,x\,f(x)$
b) En déduire que $(x^2 - 1)f^{(n+2)}(x) + 2x\,f^{(n+1)}(x) - n(n+1)f^{(n)}(x) = 0$

2) Soit f(x) = ln(1+x)

a) calculer f '(x), f ''(x) et f '''(x)
b) calculer $f^{(n)}(x)$
c) donner le développement de Taylor Mac Laurin de f(x) au voisinage de 0.
d) soit la suite de terme général $U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} [\cos(x)]^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

4) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que: $e^x - x - 1 > 0 \;\; \forall x > 0$

5) soit $f(x) = |x|^{x^2}$

a) Donner le domaine de définition de f
b) Montrer que f peut être prolongée par continuité au point 0
c) Donner f'(x)
d) Donner le tableau de variations de f(x)



Controle continue 1 08-09

Exercice 1

a/ f cont sur $[a,b]$, derivable sur $]a,b[$ et $f(a)=f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[: f'(c)=0$

b/ f n fois derivable sur $[a,b]$ alors $\exists \theta \in]a,b[$ /

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)^1}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\theta)$$

c/ soit $\varepsilon>0$ $\exists N>0$ / $\forall n>N$ $|U_n-\ell|<\varepsilon/2$

$\exists N>0$ / $\forall n>N$, $\forall m>N$: $|U_m-U_n|=|(U_m-\ell)-(U_n-\ell)|\leq|U_n-\ell|+|U_m-\ell|$
$\leq \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

Problème 1/ $U_n=a\,9^n+b\,2^n+c(-1)^n$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{a\,9^{n+1}+b\,2^{n+1}+c(-1)^{n+1}}{a\,9^n+b\,2^n+c(-1)^n}=\frac{9^{n+1}\left(a+b\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}+c\left(-\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)}{9^n\left(a+b\left(\frac{2}{9}\right)^n+c\left(-\frac{1}{9}\right)^n\right)}=9.\frac{a+b\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}+c\left(-\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{a+b\left(\frac{2}{9}\right)^n+c\left(-\frac{1}{9}\right)^n}$$

$-1<\frac{2}{9}<1$; $-1<-\frac{1}{9}<1$ $\Rightarrow \lim\left(\frac{2}{9}\right)^n=0$ et $\lim\left(-\frac{1}{9}\right)^n=0$ $\Rightarrow \lim\frac{U_{n+1}}{U_n}=9$

2/ Si $U_1-U_0>0$ c.a.d $U_1>U_0$ alors $\forall n\in\mathbb{N}: U_{n+1}>U_n$ (U_n) croissante

En effet : Pour $n=0$ $U_1>U_0$ verifiee

Supposons $U_{n+1}>U_n$ or f croissante alors $f(U_{n+1})>f(U_n)$

c.a.d $U_{n+2}>U_{n+1}$

Si $U_1-U_0<0$ c.a.d $U_1<U_0$ alors $\forall n\in\mathbb{N}: U_{n+1}<U_n$ (U_n) decroissante

Meme demonstration par recurence

b/ • f definie de $[a,b]$ vers $[a,b]$ d'où $f([a,b])\subset[a,b]$

• $U_0\in[a,b]$; f continue sur $[a,b]$

• $\forall n\in\mathbb{N}$: $a\leq U_n\leq b$ (par recurence)

• (U_n) monotone et bornée donc convergente vers ℓ et $\ell=f(\ell)$

c.a.d ℓ solution de l'equation $f(x)=x$

3/ $U_0=4$ $U_{n+1}=\frac{4U_n+5}{U_n+3}$ $f(x)=\frac{4x+5}{x+3}$ $f'(x)=\frac{7}{(x+3)^2}\geq0 \Rightarrow f$ croissante

• $U_1=\frac{4U_0+5}{U_0+3}=\frac{19}{7}<U_0$ donc (U_n) decroissante

• $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\leq U_n\leq 4$

• f continue sur $[0,4]$ et $f([0,4])\subset[0,4]$ donc (U_n) converge vers ℓ / $\ell=f(\ell)$

$\ell=\frac{4\ell+5}{\ell+3}\Rightarrow \ell^2-\ell-5=0\Rightarrow \ell=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

Problème 2   1/ $f(x) = (x^2-1)^n$

a/ $f'(x) = n(2x)(x^2-1)^{n-1} \Rightarrow (x^2-1)f'(x) = 2nx(x^2-1)^n \Rightarrow (x^2-1)f'(x) = 2nx\, f(x)$

b/ Utilisons la formule de Leibnitz : $\left[(x^2-1)f'(x)\right]^{(n)} = \left[2nx\, f(x)\right]^{(n)}$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2-1)^{(k)} (f'(x))^{(n-k)} = 2n \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x)^{(k)} (f(x))^{(n-k)}$$

$$(x^2-1)(f'(x))^{(n)} + n\cdot(2x)(f'(x))^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot(f'(x))^{(n-2)} = 2n\left(x(f(x))^{(n)} + n(f(x))^{(n-1)}\right)$$

$(x^2-1)f^{(n+1)}(x) +$ ~~$2nx f^{(n)}(x)$~~ $+ n(n-1)f^{(n-1)}(x) =$ ~~$2nx f^{(n)}(x)$~~ $+ 2n^2 f^{(n-1)}(x)$

$$(x^2-1)f^{(n+1)}(x) - n(n+1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

On remplace n par $n+1$ et on obtient : $(x^2-1)f^{(n+2)}(x) - (n+1)(n+2)f^{(n)}(x) = 0$

2/ $f(x) = \ln(1+x)$ a/ $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ $f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$ $f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$

b/ $f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\dots(-n+1)(1+x)^{-n} = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,(1+x)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n}$

c/ $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta)$; $0<\theta<x$

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^n}{(1+\theta)^n}\cdot\frac{1}{n+1}$$

d/ Pour $x = 1$ on a $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^n}$; $0<\theta<1$

On a $|U_n - \ln 2| = \frac{1}{(n+1)(1+\theta)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\lim U_n = \ln 2$

3/ $\cos x^{\frac{1}{x^2}} = e^{\ln \cos^{1/x^2}} = e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} e^{-1/2}$ car $\lim_0 \frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_0 \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_0 \frac{\sin x}{x}\cdot\left(\frac{-1}{2\cos x}\right)$
$= 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

4/ $f(x) = e^x$ cont sur $[0,x]$ dérivable sur $]0,x[$ donc $\exists\,\theta\in]0,x[$ tel que
$f(x) - f(0) = (x-0)f'(\theta)$ car $e^x - 1 = xe^\theta$
$0<\theta<x \Rightarrow 1<e^\theta<e^x \Rightarrow x < xe^\theta < xe^x \Rightarrow x < e^x - 1 < xe^x \Rightarrow e^x - x - 1 > 0$

5/ $f(x) = |x|^{x^2} = e^{x^2\ln|x|}$ a/ $x \in D_f \Leftrightarrow |x|>0 \Leftrightarrow x\neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^*$

b/ $\lim_0 f(x) = \lim_0 e^{x(x\ln|x|)} = e^{0\times 0} = 1$ donc f peut être prolongée

c/ $f'(x) = (x^2\ln|x|)' f(x) = \left(2x\ln|x| + x^2\cdot\frac{1}{x}\right)f(x) = x(2\ln|x|+1)f(x)$

d/ $2\ln|x|+1 = 0 \Leftrightarrow \ln|x| = -\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x = \pm e^{-1/2}$

x		$-e^{-1/2}$		0		$e^{-1/2}$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2\ln\lvert x\rvert+1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f'	$-$	0	$+$	‖	[illegible]	0	[illegible]


ETUSUP.com